АНЫҚТАЛМАҒАН ИНТЕГРАЛ. АЛҒАШҚЫ ФУНКЦИЯ. ИНТЕГРАЛДАУ АМАЛЫ

Шәкір Айдос Ғанижанұлы

әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті

математика кафедрасының аға оқытушысы, PhD

28 қазан 2024
Алматы, Қазақстан

Дәрістің мақсаты – интегралдау амалының көмегімен функцияның алғашқы функциясын табу және оның қасиеттерін үйрену

Негізгі сұрақтар:

1. Анықталмаған интеграл және оның қасиеттері.
2. Алғашқы функция. Функцияны интегралдау амалы.

Дифференциалдық есептеуде берілген функция бойынша оның туындысын табу есебі қойылады. Математикалық талдаудың көптеген қолданылуларында — геометрияда, физикада, механикада жиі кездесетін есептерде — берілген туындысы бойынша функцияның өзін анықтау қажет, яғни интегралдау дифференциалдауға кері амал.

Definition

Егер $f(x)$ және $F(x)$ функциялары (a, b) интервалында анықталған, кез келген $x \in (a, b)$ нүктесінде $F(x)$ дифференциалданып,

$$F'(x) = f(x) \tag{1}$$

теңдігі орындалса, онда $F(x)$ функциясын $f(x)$ функциясының (a, b) интервалындағы **алғашқы (бастапқы) функциясы** деп атайды.

Ескерту. Кесіндіде, жартылай аралықта және шексіз аралықта $f(x)$ функциясының алғашқы функциясы жоғарыдағыдай анықталады.

Мысалдар

1. $F(x) = \cos x$ функциясы $(-\infty, +\infty)$ аралығындағы $f(x) = -\sin x$ функциясының алғашқы функциясы, себебі:

$$F'(x) = (\cos x)' = -\sin x = f(x).$$

Сонымен бірге $F(x) = \cos x \pm 5$ та алғашқы функциялар.

2. $F(x) = x^3$ функциясы $(-\infty, +\infty)$ аралығында $f(x) = 3x^2$ функциясының алғашқы функциясы:

$$F'(x) = (x^3)' = 3x^2 = f(x).$$

3. $F(x) = \arcsin x$ функциясы $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1, 1)$ үшін алғашқы функция:

$$F'(x) = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = f(x).$$

Жоғарыдағы мысалдардан алғашқы функцияның бірмәнді анықталмайтыны көрінеді. Егер $F(x)$ функциясы (a, b) интервалында $f(x)$ функциясының алғашқы функциясы болса, онда $F(x) + C$, мұнда C кез келген тұрақты сан, да алғашқы функция болады.

Theorem

Егер $F_1(x)$ және $F_2(x)$ функциялары (a, b) интервалында $f(x)$ функциясының кез келген алғашқы функциялары болса, онда $\forall x \in (a, b)$ үшін

$$F_1(x) - F_2(x) = C,$$

мұнда C — тұрақты сан.

Доказательство.

$\Phi(x) = F_1(x) - F_2(x)$ деп алайық. $F_1(x)$ және $F_2(x)$ функциялары дифференциалданатындықтан, $\Phi(x)$ те дифференциалданады және:

$$\Phi'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Демек, $\Phi(x)$ тұрақты функция, яғни $F_1(x) - F_2(x) = C$. $\square$

Definition

(a, b) интервалында берілген $f(x)$ функциясының барлық алғашқы функциялар жиынтығын $f(x)$ функциясының **анықталмаған интегралы** деп атайды, оны

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

түрінде белгілейді, мұнда C — еркін тұрақты.

Жоғарыдағы мысалдарға оралсақ:

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$$

$$\int 3x^2\,dx = x^3 + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$$

Анықталмаған интеграл анықтамасы және оның қасиеттері

Анықталмаған интеграл анықтамасынан төмендегі қасиеттер шығады.

1. Анықталмаған интегралдың туындысы интеграл астындағы функцияға тең:

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x).$$

Шынында,

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = (F(x)+C)' = F'(x) = f(x).$$

2. Анықталмаған интегралдан алынған дифференциал интеграл астындағы өрнекке тең:

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx.$$

Шынында,

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = d(F(x)+C) = dF(x) = f(x)\,dx.$$

Демек, егер дифференциал белгісі интеграл белгісінің алдында тұрса, олар өзара қысқарады.

3. Дифференциалдан алынған анықталмаған интеграл:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

Шынында,

$$\int dF(x) = \int F'(x)\,dx = F(x) + C.$$

6.2 Анықталмаған интегралдың негізгі қасиеттері

Теорема 6.2.1. Тұрақты санды анықталмаған интеграл алдына шығаруға болады:

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx, \qquad k = \mathrm{const}.$$

Дәлелдеу.

$$\left(\int kf(x)\,dx\right)' = kf(x), \qquad \left(k\int f(x)\,dx\right)' = kf(x).$$

Теорема дәлелденді.

Теорема 6.2.2. Алгебралық қосындының анықталмаған интегралы анықталмаған интегралдардың алгебралық қосындысына тең:

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$$

Дәлелдеу. Егер $F'(x) = f(x)$ және $G'(x) = g(x)$, онда

$$[F(x) \pm G(x)]' = F'(x) \pm G'(x) = f(x) \pm g(x).$$

Теорема дәлелденді.

6.3 Анықталмаған интегралдар кестесі

Әрбір дифференциалдау формуласына сәйкес интегралдау формуласы бар:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

I $\quad \int 0\,dx = C.$

II $\quad \int 1\,dx = x + C.$

III $\quad \int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1.$

IV $\quad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

V $\quad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0,\ a \neq 1.$

VI $\quad \int e^x\,dx = e^x + C.$

VII $\quad \int \sin x\,dx = -\cos x + C.$

VIII $\quad \int \cos x\,dx = \sin x + C.$

IX $\quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C.$

$$\text{X} \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C.$$

$$\text{XI} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$$

$$\text{XII} \quad \int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + C.$$

$$\text{XIII} \quad \int \cot x \, dx = \ln|\sin x| + C.$$

$$\text{XIV} \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C.$$

$$\text{XV} \quad \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C.$$

$$\text{XVI} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$$

$$\text{XVII} \quad \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C.$$

$$\text{XVIII} \quad \int \sinh x \, dx = \cosh x + C.$$

$$\text{XIX} \quad \int \cosh x \, dx = \sinh x + C.$$

$$\text{XX} \quad \int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C.$$

$$\text{XXI} \quad \int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x + C.$$

$$\text{XXII} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm \alpha}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm \alpha} \right| + C.$$

Анықталмаған интегралды интегралдау әдістері
Айнымалыны алмастыру әдісі

Теорема 6.4.1. $t = \varphi(x)$ қатаң монотонды және дифференциалданатын функция болсын. Егер

$$\int g(t)\,dt = G(t) + C,$$

онда

$$\int g[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx = G[\varphi(x)] + C.$$

Бұл ереже күрделі функцияны дифференциалдау формуласынан шығады:

$$\frac{d}{dx}G(\varphi(x)) = G'(\varphi(x))\varphi'(x) = g(\varphi(x))\varphi'(x).$$

Айнымалыны алмастыру әдісінің мәні:

$$\int f(x)\,dx$$

түріндегі интегралда $t = \varphi(x)$ алмастыру енгізіп,

$$f(x)\,dx = g(t)\,dt$$

түріне келтіру.
Сонда интеграл:

$$\int f(x)\,dx = G(\varphi(x)) + C.$$

Айнымалыны алмастыру интегралдаудың ең тиімді әдістерінің бірі.

Бөліктеп интегралдау әдісі

Теорема Егер $u(x)$ және $\vartheta(x)$ функциялары X аралығында анықталған дифференциалданатын функциялар және осы аралықта $\vartheta(x)u'(x)$ функциясының алғашқы функциясы бар болса, онда осы аралықта $u(x)\vartheta'(x)$ функциясының да алғашқы функциясы бар және

$$\int u(x)\vartheta'(x)\,dx = u(x)\vartheta(x) - \int \vartheta(x)u'(x)\,dx, \tag{1}$$

немесе қысқа түрде

$$\int u\,d\vartheta = u\vartheta - \int \vartheta\,du. \tag{2}$$

Дәлелдеу. $u(x)\vartheta(x)$ көбейтіндісінің туындысы белгілі:

$$[u(x)\vartheta(x)]' = u'(x)\vartheta(x) + u(x)\vartheta'(x). \tag{3}$$

(3) теңдіктің екі жағын dx-ке көбейтеміз:

$$[u(x)\vartheta(x)]'\,dx = u'(x)\vartheta(x)\,dx + u(x)\vartheta'(x)\,dx.$$

Енді интегралдаймыз:

$$\int [u(x)\vartheta(x)]' dx = \int u'(x)\vartheta(x)\, dx + \int u(x)\vartheta'(x)\, dx.$$

Осыдан:

$$\int u(x)\vartheta'(x)\, dx = \int [u(x)\vartheta(x)]' dx - \int \vartheta(x)u'(x)\, dx.$$

Ал

$$\int [u(x)\vartheta(x)]' dx = u(x)\vartheta(x) + C,$$

сондықтан X аралығында барлық $x \in X$ үшін

$$\int u(x)\vartheta'(x)\, dx = u(x)\vartheta(x) - \int \vartheta(x)u'(x)\, dx.$$

(2) формула дәлелденді.

(2) формуладағы

$$\int u\, d\vartheta$$

түріндегі интегралды есептеу

$$\int \vartheta\, du$$

түріндегі интегралға келтірілді. Мұндағы соңғы интеграл не кестелік, не интегралдауы жеңіл болуы тиіс.
(2) формуланы **бөліктеп интегралдау формуласы** деп атайды.

Қосымша ақпарат

Студент толық ақпаратты [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7] жұмыстардан қарауға болады.

Ибрашев Х.И., Еркеғұлов Ш.Т.
Математикалық анализ курсы. – Алматы: Экономика, 2014. – 1-том. – 562 б.

Жәутіков О.А.
Математикалық анализ курсы. – Алматы: Экономика, 2014. – 832 б.

Темірғалиев Н.Т.
Математикалық анализ. – Алматы: Мектеп, 1987. – 1-том. – 288 б.

Темірғалиев Н.Т.
Математикалық анализ. – Алматы: Ана тілі, 1991. – 2-том. – 400 б.

Ильин В.А., Позняк Э.Г.
Основы математического анализа. – М.: Наука-Физматлит, 1998. – Часть 1. – 616 с.

Ильин В.А., Позняк Э.Г.
Основы математического анализа. – М.: Наука-Физматлит, 1998. – Часть 2. – 448 с.

Зорич В.А.
Математический анализ. – М.: МЦНМО, 2012. – Т. 1. – 702 с.

Кудрявцев Л.Д.
Математический анализ. – М.: Высшая школа, 1981. – Том 1. – 687 с.

Фихтенгольц Г.М.
Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Физматлит, 2003. – Том 1. – 680 с.

Фихтенгольц Г.М.
Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Физматлит, 2003. – Том 2. – 802 с.

Демидович Б.П.
Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1997. – 624 с.

Берман Г.Н.
Сборник задач по курсу математического анализа. – СПб.: Профессия, 2001. – 432 с.

Кудрявцев Л.Д.
Краткий курс математического анализа. – М.: Физматлит, 2005. – Том 1. – 400 с.

Сатығулова С., Искакова А.Қ., Айтжанов С.Е.
Математикалық анализ I. – Алматы: Қазақ университеті, 2020. -236 б.

НАЗАРЛАРЫҢЫЗҒА РАҚМЕТ!